



Abbildung 14.6
 Maximale Signalfrequenzen und Aliasing in 2D. Der Rand des $M \times N$ großen 2D-Spektrums (inneres Rechteck) markiert die maximal zulässigen Signalfrequenzen für jede Richtung. Das äußere Rechteck bezeichnet die Lage der effektiven Abtastfrequenz, das ist jeweils das Doppelte der maximalen Signalfrequenz in der jeweiligen Richtung. Die Signalkomponente mit der Spektralposition A bzw. \bar{A} liegt innerhalb des maximal darstellbaren Frequenzbereichs und verursacht daher kein Aliasing. Im Gegensatz dazu ist die Komponente B bzw. \bar{B} außerhalb des zulässigen Bereichs. Durch die Periodizität des Spektrums wiederholen sich die Komponenten – wie im eindimensionalen Fall – an allen ganzzahligen Vielfachen der Abtastfrequenzen entlang der m - und n -Achsen. Dadurch erscheint die Komponente B als „Alias“ an der Position B' (bzw. \bar{B} an der Stelle \bar{B}') im sichtbaren Bereich des Spektrums. Man sieht, dass sich dadurch auch die Richtung der zugehörigen Welle im Ortsraum ändert.

wobei $\psi_{(m,n)}$ für $m = n = 0$ natürlich unbestimmt ist.¹ Umgekehrt wird ein zweidimensionales Sinusoid mit effektiver Frequenz \hat{f} und Richtung ψ durch die Spektralkoordinaten

$$(m, n) = \pm \hat{f} \cdot (M \cos \psi, N \sin \psi) \quad (14.13)$$

repräsentiert, wie bereits in Abb. 14.5 dargestellt.

14.3.4 Geometrische Korrektur des 2D-Spektrums

Aus Gl. 14.13 ergibt sich, dass im speziellen Fall einer Sinus-/Kosinuswelle mit Orientierung $\psi = 45^\circ$ die zugehörigen Spektralkoeffizienten an den Koordinaten

$$(m, n) = \pm(\lambda M, \lambda N) \quad \text{für} \quad -\frac{1}{2} \leq \lambda \leq +\frac{1}{2} \quad (14.14)$$

(s. Gl. 14.11) zu finden sind, d. h. auf der Diagonale des Spektrums. Sofern das Bild (und damit auch das Spektrum) nicht quadratisch ist (d. h. $M = N$), sind die Richtungswinkel im Bild und im Spektrum nicht identisch, fallen aber in Richtung der Koordinatenachsen jeweils zusammen. Dies bedeutet, dass bei der Rotation eines Bildmusters um einen Winkel α das Spektrum zwar in der gleichen Richtung gedreht wird, aber i. Allg. *nicht* um denselben Winkel α !

Um Orientierungen und Drehwinkel im Bild und im Spektrum identisch erscheinen zu lassen, genügt es, das Spektrum auf *quadratische* Form zu skalieren, sodass die spektrale Auflösung entlang beider Frequenzachsen die gleiche ist (wie in Abb. 14.7 gezeigt).

¹ $\arctan_2(y, x)$ in Gl. 14.12 steht für die inverse Tangensfunktion $\tan^{-1}(y/x)$ (s. auch Anhang B.1.6).