16.1.1 Einfache Abbildungen

Zu den einfachen Abbildungsfunktionen gehören Verschiebung, Skalierung, Scherung und Rotation:

Verschiebung (Translation) um den Vektor (d_x, d_y):

$$\begin{array}{l} T_x : x' = x + d_x \\ T_y : y' = y + d_y \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix} \tag{16.4}$$

Skalierung (Streckung oder Stauchung) in x- oder y-Richtung um den Faktor s_x bzw. s_y:

$$\begin{array}{l} T_x : x' = s_x \cdot x \\ T_y : y' = s_y \cdot y \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{16.5}$$

Scherung in x- oder y-Richtung um den Faktor b_x bzw. b_y (bei einer Scherung in nur einer Richtung ist der jeweils andere Faktor null):

$$\begin{array}{l} T_x : x' = x + b_x \cdot y \\ T_y : y' = y + b_y \cdot x \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b_x \\ b_y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{16.6}$$

Rotation (Drehung) um den Winkel α (mit dem Koordinatenursprung als Drehmittelpunkt):

$$\begin{array}{l} T_x : x' = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha \\ T_y : y' = x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha \end{array} \quad \text{oder} \tag{16.7}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{16.8}$$

16.1.2 Homogene Koordinaten

Die Operationen in Gl. 16.4–16.8 bilden zusammen die wichtige Klasse der affinen Abbildungen (siehe Abschn. 16.1.3). Für die Verknüpfung durch Hintereinanderausführung ist es vorteilhaft, wenn alle Operationen jeweils als Matrixmultiplikation beschreibbar sind. Das ist bei der Translation (Gl. 16.4), die eine Vektoraddition ist, nicht der Fall. Eine mathematisch elegante Lösung dafür sind *homogene Koordinaten* [23, S. 204].

Bei homogenen Koordinaten wird jeder Vektor um eine zusätzliche Komponente (h) erweitert, d. h. für den zweidimensionalen Fall

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h\,x \\ h\,y \\ h \end{pmatrix}. \tag{16.9}$$

Jedes gewöhnliche (kartesische) Koordinatenpaar $\boldsymbol{x} = (x, y)$ wird also durch den dreidimensionalen homogenen Koordinatenvektor $\hat{\boldsymbol{x}} = (\hat{x}, \hat{y}, h)$