Abstand und Korrelation

Der N-dimensionale euklidische Abstand (Gl. 17.3) ist von besonderer Bedeutung und wird wegen seiner formalen Qualitäten auch in der Statistik häufig verwendet. Um die beste Übereinstimmung zwischen dem Referenzbild $R(u,v)$ und dem Zielbild $I(u,v)$ zu finden, genügt es, das Quadrat von d_E (das in jedem Fall positiv ist) zu minimieren, welches in der Form

$$\mathrm{d}_E^2(r,s) = \sum_{(i,j)\in R} \big(I(r{+}i,s{+}j) - R(i,j)\big)^2 \tag{17.4}$$

$$= \underbrace{\sum_{(i,j)\in R} \big(I(r{+}i,s{+}j)\big)^2}_{A(r,s)} + \underbrace{\sum_{(i,j)\in R} \big(R(i,j)\big)^2}_{B} - 2\underbrace{\sum_{(i,j)\in R} I(r{+}i,s{+}j)\cdot R(i,j)}_{C(r,s)}$$

expandiert werden kann. Der Ausdruck B in Gl. 17.4 ist dabei die Summe der quadratischen Werte des Referenzbilds R, also eine von r,s unabhängige Konstante, die ignoriert werden kann. Der Ausdruck $A(r,s)$ ist die Summe der quadratischen Werte des entsprechenden Bildausschnitts in I beim aktuellen Offset (r,s), und $C(r,s)$ entspricht der so genannten *linearen Kreuzkorrelation* zwischen I und R. Diese ist für den allgemeinen Fall definiert als

$$(I \circledast R)(r,s) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} I(r{+}i,s{+}j)\cdot R(i,j), \tag{17.5}$$

was – da R und I außerhalb ihrer Grenzen als null angenommen werden – wiederum äquivalent ist zu

$$\sum_{i=0}^{w_R-1} \sum_{j=0}^{h_R-1} I(r{+}i,s{+}j)\cdot R(i,j) = \sum_{(i,j)\in R} I(r{+}i,s{+}j)\cdot R(i,j) \;=\; C(r,s).$$

Die Korrelation ist damit im Grunde dieselbe Operation wie die lineare *Faltung* (Abschn. 6.3.1, Gl. 6.14), außer dass bei der Korrelation der Faltungskern (in diesem Fall $R(i,j)$) implizit gespiegelt ist.

Wenn nun $A(r,s)$ in Gl. 17.4 innerhalb des Bilds I weitgehend konstant ist – also die „Signalenergie" annähernd gleichförmig im Bild verteilt ist –, dann befindet sich an der Position des Maximalwerts der Korrelation $C(r,s)$ gleichzeitig auch die Stelle der höchsten Übereinstimmung zwischen R und I. In diesem Fall kann also der Minimalwert von $d_E^2(r,s)$ (Gl. 17.4) allein durch Berechnung des Maximalwerts der Korrelation $I \circledast R$ ermittelt werden. Das ist u. a. deshalb interessant, weil die Korrelation über die *Fouriertransformation* im Spektralraum sehr effizient berechnet werden kann (s. Abschn. 14.5).